La loi normale

(ou loi de Laplace-Gauss ou loi de Gauss)

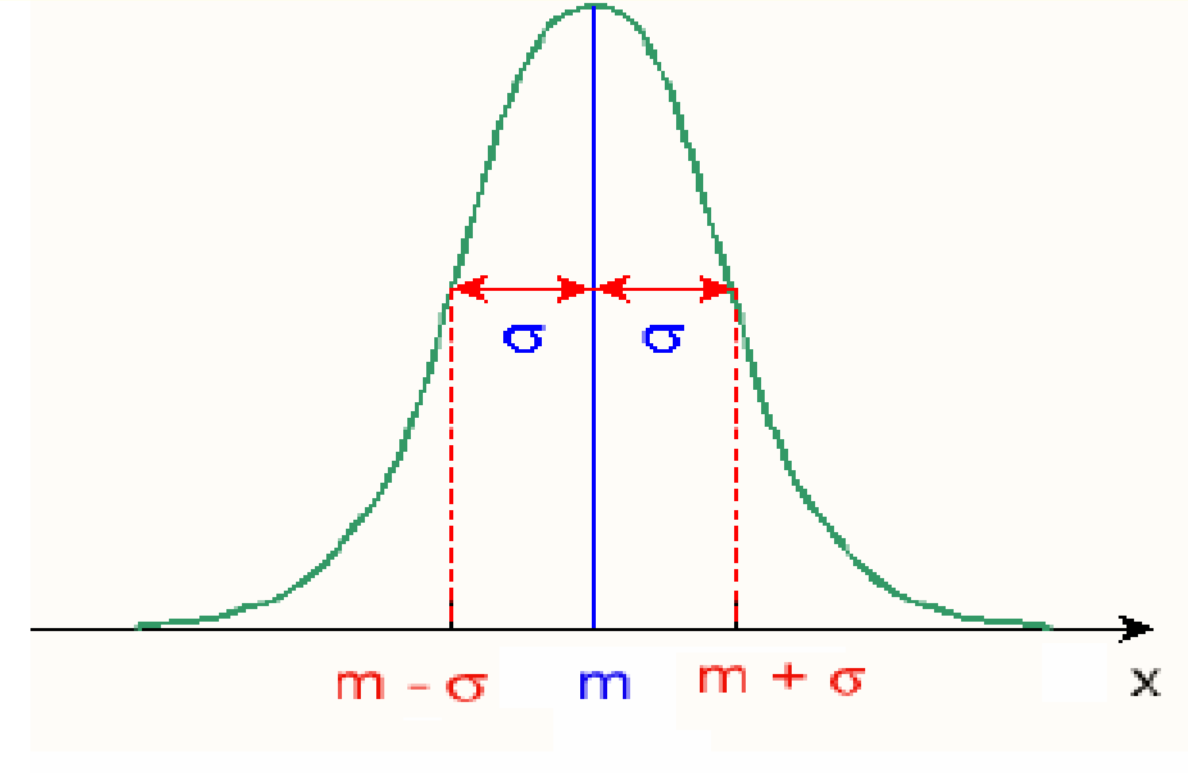
ABDELOUAHAB A

Les fondamentaux

La distribution normale est une distribution théorique, en ce sens c' est une idéalisation mathématique qui ne se rencontre jamais *exactement* dans la nature.

Fameuse forme de « cloche » (beaucoup d'individus autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique).

Représentation graphique



Densité de probabilité

La loi normale de paramètres m et s, notée N(m,s), est définie sur R par la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Le théorème Central-limit

Si on fait la somme d’un très grand nombre de variables aléatoires de loi quelconque, cette somme suit approximativement une loi normale.

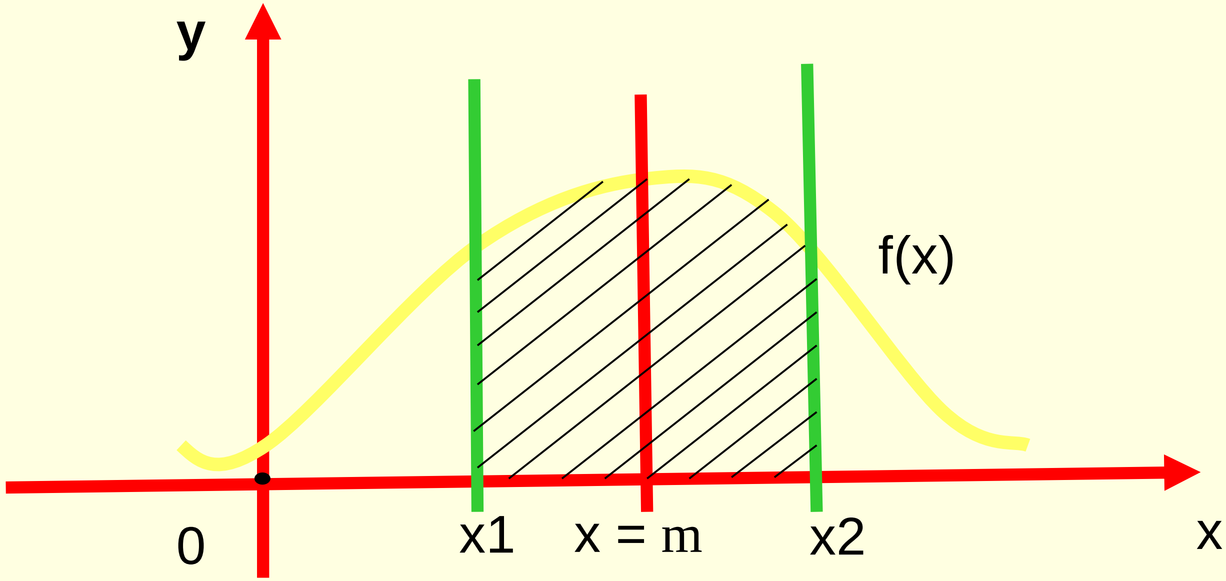
X = X1 + X2+ … Xn tend à suivre une loi normale quand n tend vers l’infini.

L’addition d’un grand nombre de causes de fluctuation indépendantes.
Exemple : la taille d’un individu.

Probabilité et surface

La surface totale comprise entre la courbe de la loi normale et l'axe des abscisses vaut **1** ;

Alors **p(x2 > x > x1) = surface hachurée**



Donc,

la probabilité recherchée est équivalente à la surface hachurée,

qui est obtenue par intégration F(x)= ∫ f (x)

Calculs de probabilités sur une loi normale

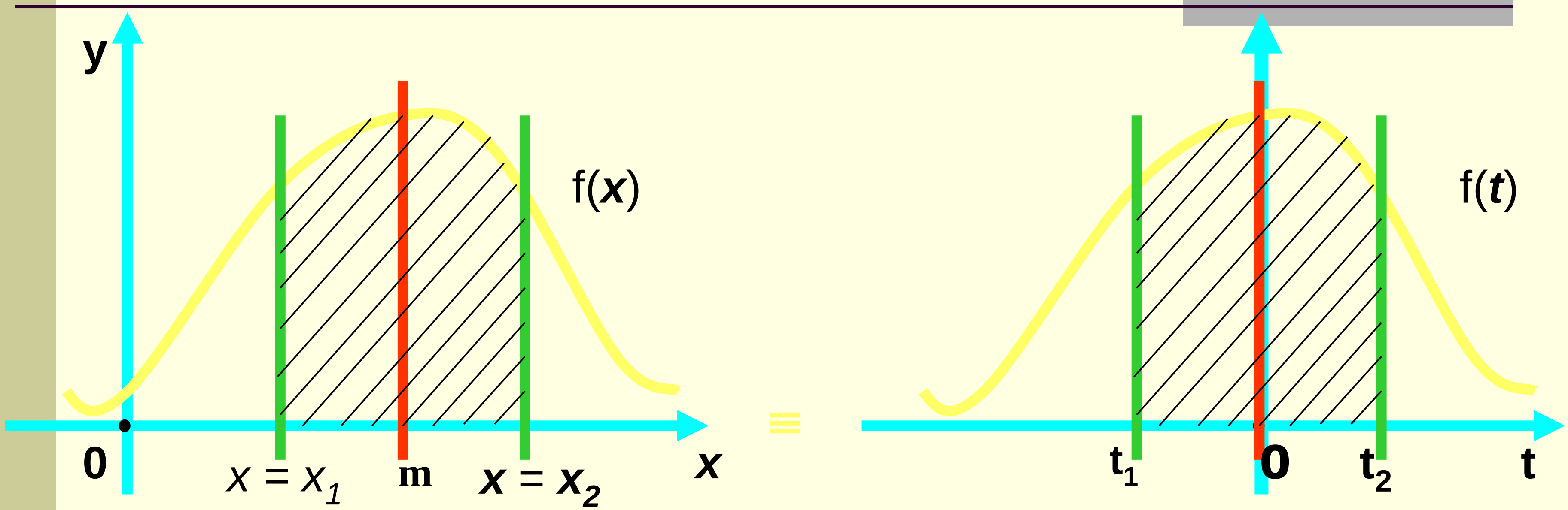
Un gros inconvénient **:** on ne sait pas exprimer F(x) en fonctions de x

On ne connaît pas de primitive de la fonction e^{-x^2}

donc on ne sait pas donner l'expression algébrique de la fonction de répartition F(x).

Comment dans ces conditions calculer les probabilités de tomber entre telle ou telle valeur?

*Passage de la loi normale **N (m; σ)** à la loi normale <u>Centrée Réduite</u> **N (0 ; 1)***



Équivalence des surfaces hachurées dans les deux repères

On associe les surfaces aux probabilités **:**

$P(x_2 > x > x_1) = P(t_2 > t > t_1)$= aire hachurée

Les probabilités de F(t) sont tabulées

Exemple

Dans un échantillon de **200** personnes adultes, les résultats de la glycémie ont montré qu'elle présente une moyenne de **1,08 g/l** et un écart type de **0,10 g/l**. En supposant que la variable « taux de glycémie » suit une loi normale, déterminer :

1- la probabilité d'avoir un taux compris entre **0,90 et 1,25 g/l.**

2- Le nombre d'individus ayant un taux compris entre **0,90 et 1,25 g/l.**

Données :

m = 1,08 g/l ; σ = 0,10 g/l

$P(1{,}25 \geq x \geq 0{,}90) = ?$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0{,}90$ et $x_2 = 1{,}25$

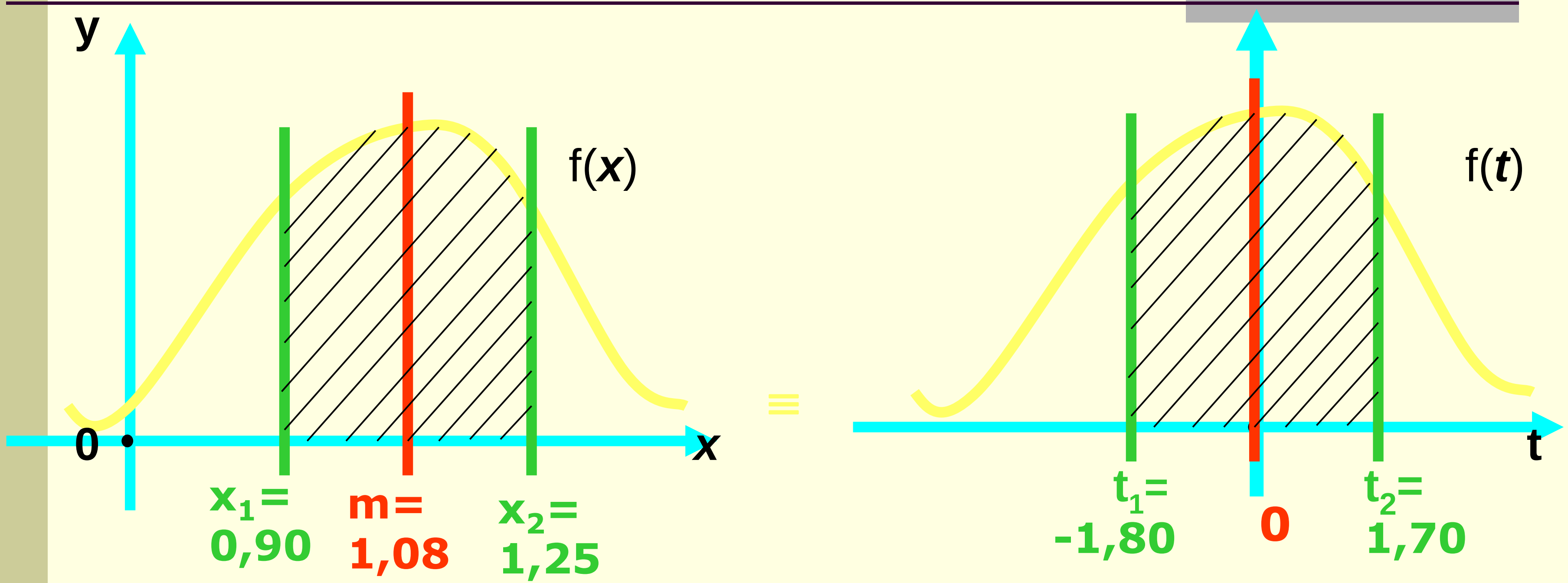
1- la probabilité d'avoir un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l :

Première étape : calcul de la variable centrée réduite.

$$t_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{0{,}90 - 1{,}08}{0{,}10} = -1{,}80$$

$$t_1 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{1{,}25 - 1{,}08}{0{,}10} = +1{,}70$$

Deuxième étape : Schéma



P (1,25 ≥ ***x*** ≥ 0,90) = P (1,70 ≥ **t** ≥ -1,80) = Prob. demandée

Troisième étape : utilisation de la table

Probabilité demandée = G (-1,80) + G (1,70)

= G (1,80) + G (1,70)

= 0,4641 + 0,4554

= 0,9195.

Alors **P (1,25≥ x ≥ 0,90) = 0,9195**

2- Le nombre d'individus ayant un taux compris entre 0,90 et 1,25 g/l

n.p = 200 . 0,9195 = 184 individus.

Table de la loi normale centrée réduite (EXTRAIT)

t	0, 00	0, 01	0, 02	0, 03	0, 04	0, 05	0, 06
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636
0,2	0,0832	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315

Intervalles remarquables de la loi normale